27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa
Lleida, 8–11 de abril de 2003

UNA CARACTERIZACIÓN DIRECTA DEL CONTROL ÓPTIMO EN PROBLEMAS DE CONTROL ESTOCÁSTICO

R. Josa-Fombellida[1], J.P. Rincón-Zapatero[2]

[1]Departamento de Estadística e I.O.
Universidad de Valladolid, 47071 Valladolid, España
E-mail: ricar@eio.uva.es
[2]Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid, España
E-mail: zapatero@eco.uva.es

RESUMEN

El método clásico de resolución de problemas de control óptimo estocástico en tiempo continuo está basado en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, que caracteriza a la función valor óptimo. En este trabajo probamos que, en problemas en los que el parámetro de difusión es independiente de las variables de control, éstas quedan caracterizadas de forma directa por un sistema semilineal de ecuaciones en derivadas parciales. Mediante este nuevo enfoque resolvemos explícitamente el problema homogéneo unidimensional y aplicamos los resultados obtenidos al estudio de un problema de gestión óptima de un recurso natural no renovable en ambiente de incertidumbre.

Palabras y frases clave: Control estocástico, fórmula de Itô, ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, ecuación parabólica semilineal, recurso no renovable.
Clasificación AMS: 90C39, 91B76, 93E20, 60H30.

1 Introducción

El enfoque usual para la resolución de problemas de control óptimo estocástico se basa en el principio de optimalidad de Bellman (1957) y en el estudio de la ecuación en derivadas parciales que surge como consecuencia de la aplicación de dicho principio. La ecuación antes mencionada, llamada ecuación de Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB), es de tipo parabólico o elíptico (en problemas independientes del tiempo) y de segundo orden. A menudo, la ecuación de HJB es completamente no lineal. Esto significa que el término que involucra a las derivadas de segundo orden es no lineal, y en consecuencia, es difícil asegurar la existencia de solución en el sentido clásico. En este caso, los teoremas de verificación de Fleming y Rishel (1975) o Fleming y Soner (1993), que dependen de la regularidad de la solución de la ecuación de HJB, no son operativos.

En este trabajo pretendemos iniciar un nuevo camino en el análisis de ciertos problemas de control óptimo estocástico. Nuestro interés se centra en determinar un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que caracteriza directamente a los controles óptimos. Dichas ecuaciones son de segundo orden y semilineales, de tipo parabólico.

Exponemos nuestro enfoque sobre problemas con una variable de estado y una variable de control, aunque se puede extender a problemas con varias variables. El trabajo se desarrolla de la siguiente forma. En la Sección 2 presentamos el problema de control estocástico, así como algunas de las notaciones que emplearemos en el trabajo. En la Sección 3 obtenemos la ecuación en derivadas parciales que debe satisfacer un control óptimo de clase $\mathcal{C}^{1,2}$. En la Sección 4 establecemos condiciones que garantizan que una solución de clase $\mathcal{C}^{1,2}$ de la ecuación es óptima del problema estocástico. En la Sección 5 resolvemos explícitamente con esta metodología el problema de control estocástico en el caso homogéneo, lo que aplicamos en la Subsección 5.3 a un problema de extracción de recursos naturales no renovables. Este último apartado da una idea parcial de la aplicabilidad de la nueva ecuación, que será explotable en futuros trabajos. Finalizamos el trabajo con las conclusiones.

2 El problema de control

Consideramos un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un intervalo de tiempo $[0, T]$, con $0 < T \leq \infty$. Denotamos por $w = \{w(t) : t \in [0, T]\}$ un movimiento Browniano unidimensional definido sobre el espacio probabilístico y por E a la esperanza bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}$.

El espacio de estados es $\mathbb{R}$ y la región donde los controles pueden tomar valores es el subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}$. Un proceso $u(\cdot)$ con valores en U definido en $[t, T] \times \Omega$ es $\mathcal{F}_s$–medible si la aplicación $(r, \omega) \to u(r, \omega)$ de $[t, s] \times \Omega$ en U es $\mathcal{B}_s \times \mathcal{F}_s$–medible para cada $s \in [t, T]$. $\{\mathcal{F}_s\}$ es una familia creciente de σ–álgebras con $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}$ para todo $s \in [t, T]$, $t \in [0, T]$ y $\mathcal{B}_s$ es la σ–álgebra de Borel en $[t, s]$.

Para simplificar, denotamos por $u(t)$ a $u(t, \omega)$. Un proceso de control medible es admisible si para cada $k \in \mathbb{N}$, $E \int_t^T |u(s)|^k \, ds < \infty$.

El proceso de estado ξ verifica la ecuación diferencial estocástica

$$d\xi(s) = f(s, \xi(s), u(s)) \, ds + \sigma(s, \xi(s)) \, dw(s), \quad s \geq t; \qquad \xi(t) = x. \tag{1}$$

Observemos que el coeficiente de difusión σ no depende del control u.

Dada una condición inicial $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, el criterio de maximización es

$$J(t,x;u) = E_{tx} \left\{ \int_t^T L(s,\xi(s),u(s))\, ds + S(T,\xi(T)) \right\}, \tag{2}$$

donde E_{tx} denota esperanza condicionada a la condición inicial (t,x). En todo lo que sigue eliminaremos la dependencia de la esperanza condicionada con respecto a la condición inicial cuando ello no dé lugar a confusión.
Las funciones que intervienen están definidas así: $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $L : [0,T] \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ y $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
La dimensión del espacio de estados y de controles es igual a uno. El caso multidimensional donde el número de variables de control es mayor que el de variables de estado también podría ser tratado con nuestro enfoque. La aplicación del principio del máximo estocástico permite eliminar los controles redundantes, obteniendo así un problema de control con las mismas dimensiones para controles y estados.
Con vistas a aplicar el principio del máximo estocástico, imponemos las siguientes hipótesis:

H0. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es el filtro natural generado por w, aumentado por todos los conjuntos $\mathbb{P}$–nulos en $\mathcal{F}$.

H1. (U,d) es un espacio métrico separable y $T > 0$.

H2. f, σ, L y S son medibles, de clase $\mathcal{C}^2$ respecto a (x,u) y de clase $\mathcal{C}^1$ respecto a t. Además, existe una constante $C > 0$ y un módulo de continuidad $\bar{\omega} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que para $\varphi = f, \sigma, L, S$, tenemos

$$\begin{aligned}
|\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\widehat{x},\widehat{u})| &\leq C|x-\widehat{x}| + \bar{\omega}(d(u,\widehat{u})), \\
|\varphi_x(t,x,u) - \varphi_x(t,\widehat{x},\widehat{u})| &\leq C|x-\widehat{x}| + \bar{\omega}(d(u,\widehat{u})), \\
|\varphi_{xx}(t,x,u) - \varphi_{xx}(t,\widehat{x},\widehat{u})| &\leq \bar{\omega}(|x-\widehat{x}| + d(u,\widehat{u})), \\
& \quad \forall t \in [0,T],\ x,\widehat{x} \in \mathbb{R},\ u,\widehat{u} \in U, \\
|\varphi(t,0,u)| &\leq C \qquad \forall (t,u) \in [0,T] \times U.
\end{aligned}$$

Consideramos controles de Markov, es decir, de la forma $u(t) = \phi(t,\xi(t))$, $t \geq 0$ para alguna función $\phi : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow U$ de clase $\mathcal{C}^{1,2}$.
Si ϕ es independiente del tiempo, será llamado control de Markov estacionario. Denotaremos por $\mathcal{U}$ al conjunto de todos los controles admisibles markovianos.
A menudo identificaremos u y ϕ en la notación. Dado $u \in \mathcal{U}$ la ecuación de estado (1) admite una única solución fuerte $\xi(s)$, que es un proceso de Markov, veáse Borkar (1989), Teorema 1.4, con operador de evolución retrospectivo $\mathcal{A}^u$, donde para $W : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^{1,2}$

$$\mathcal{A}^{\phi} W(t,x) = W_t(t,x) + W_x(t,x) f(t,x,\phi(t,x)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x) W_{xx}(t,x).$$

Las derivadas parciales se denotan mediante un subíndice.
La función valor óptimo se define como

$$V(t,x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} J(t,x;u).$$

Un control admisible $\widehat{u} \in \mathcal{U}$ es óptimo si $V(t,x) = J(t,x;\widehat{u})$ para toda condición inicial (t,x).

3 Condiciones necesarias de optimalidad

Nuestro objetivo en esta sección es determinar una ecuación en derivadas parciales que debe satisfacer un control óptimo y proceder a estudiar sus propiedades.
Consideremos el principio del máximo estocástico aplicado al problema planteado en la sección anterior. El principio del máximo estocástico tiene sus orígenes en el correspondiente principio del máximo para problemas deterministas. Los primeros trabajos en los que se muestran resultados parciales se encuentran en Haussmann (1986). Este autor basa su enfoque en la transformación de Girsanov, véase Karatzas y Shreve (1988), por lo que sus resultados sólo son válidos para problemas en los que los coeficientes de difusión σ son independientes de la variable de control y además, no degenerados. En Bismut (1973) se desarrolla un principio del máximo mediante las técnicas del análisis convexo y la teoría de representación de martingalas, obteniendo una ecuación para la variable adjunta, comenzando el estudio de lo que hoy se conoce como ecuaciones diferenciales estocásticas retrospectivas, tan importantes hoy día en la literatura. El trabajo de Bismut no ha tenido seguramente las repercusiones que merecía, pero es indudable que contiene el germen de los resultados más generales que se han desarrollado después y que, básicamente, tienen el mérito de considerar regiones de control no convexas. El principio del máximo tal y como lo conocemos hoy en día fue formulado y probado por Peng (1990). La referencia más completa es, sin lugar a dudas, Yong y Zhou (1999). Dada nuestra formulación del problema de control a lo largo del trabajo, nos hubiera bastado el principio del máximo establecido por Bismut en la década de los años 70, dado que suponemos que el control óptimo es interior a la región admisible.
Las hipótesis H0–H2 permiten la aplicación del principio del máximo estocástico, de forma que si dada la condición inicial (t,x) el par (ξ,u) es óptimo, con $u(t) = \phi(t,\xi(t))$, entonces existen procesos $p \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R})$, $q \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R})$ satisfaciendo

la ecuación adjunta de primer orden[1]

$$\begin{aligned} dp(s) &= -\Big(H_x(s,\xi(s),\phi(s,\xi(s)),p(s)) + \sigma_x(s,\xi(s))q(s)\Big)ds \\ &\quad +q(s)dw(s), \quad s\in[t,T], \qquad (3)\\ p(T) &= S_x(T,\xi(T)), \qquad (4) \end{aligned}$$

donde $H(t,x,u,p) = L(t,x,u) + pf(t,x,u)$ es el Hamiltoniano correspondiente al problema determinista asociado, es decir, con $\sigma = 0$. Además, se verifica la siguiente condición de maximización:

$$H(s,\xi(s),\phi(s,\xi(s)),p(s)) = \max_{u\in U} H(s,\xi(s),u,p(s)) \qquad (5)$$

para cada $s\in[t,T]$, c.s. $\mathbb{P}$. Ahora, asumiendo que el argumento que maximiza en (5) es interior a la región admisible U, tenemos

$$H_u(s,\xi(s),\phi(s,\xi(s)),p(s)) = 0, \quad \forall s\in[t,T], \quad \text{c.s. } \mathbb{P}.$$

La ecuación anterior implica

$$p = -L_u/f_u, \qquad (6)$$

siempre que f_u sea distinto de cero para todo $(t,x,u)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times U$. En lo que sigue denotaremos por Γ a la función dada por $\Gamma(t,x,u) = (-L_u/f_u)(t,x,u)$, para todo (t,x,u).
Supongamos que existe una función vectorial γ de clase $\mathcal{C}^{1,2}$, dependiente de las variables (s,y) y tal que $p(s) = \gamma(s,\xi(s))$, donde p es la variable adjunta del problema con condición inicial t,x. Aplicando la regla de Itô a $\gamma(s,\xi(s))$ tenemos

$$d\gamma = (\gamma_t + \gamma_x f + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma_{xx})\,ds + \gamma_x\sigma\,dw. \qquad (7)$$

Por la unicidad de soluciones de (3), podemos igualar los términos de difusión y deriva en las expresiones (3) y (7) para obtener

$$q = \gamma_x\sigma,$$

$$-\Big(H_x + \sigma_x q\Big) = \gamma_t + \gamma_x f + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma_{xx}.$$

Por tanto tenemos

$$\gamma_t + \gamma_x f + H_x + \sigma_x\gamma_x\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma_{xx} = 0. \qquad (8)$$

[1]La notación completa para los procesos adjuntos es $p(s;\,t,x)$, $q(s;\,t,x)$ con $s\in[t,T]$, aunque si no hay confusión nosotros suprimiremos la dependencia de la condición inicial (t,x). $L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R})$ denota el conjunto de todos los procesos $X(\cdot)$ con valores en $\mathbb{R}$ adaptados al filtro $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ tal que $E\int_0^T |X(t)|^2\,dt < \infty$.

Observamos que la ecuación obtenida depende también del control óptimo. Sin embargo, en nuestro contexto es posible eliminar la dependencia respecto al control óptimo $\widehat{\phi}$, dada la relación

$$p(t;t,x) = \gamma(t,x) = \Gamma(t,x,\widehat{\phi}(t,x)), \tag{9}$$

en la que Γ es conocido. Suponiendo que es posible obtener una función suficientemente regular $\widetilde{u}(t,x,z)$ tal que $\widehat{\phi}(t,x) = \widetilde{u}(t,x,\gamma(t,x))$, es decir, $\widetilde{u}$ es la inversa de Γ respecto a su tercera componente, para todo (t,x), entonces sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos una ecuación en derivadas parciales que satisface la variable adjunta:

$$\gamma_t + \gamma_x \widetilde{f} + \widetilde{L}_x + \gamma \widetilde{f}_x + \sigma_x \gamma_x \sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma_{xx} = 0, \tag{10}$$

donde para $\psi = f, L,\ \widetilde{\psi}(t,x,\gamma) = \psi(t,x,\widetilde{u}(t,x,\gamma))$.
Bajo las condiciones establecidas en este capítulo, es decir, igual número de variables de estado que de control, despejar p en función de t, x y u es trivial dado que el sistema que hay que resolver es lineal en p. Ésta es una de las consideraciones que nos han llevado a concentrar el desarrollo de este trabajo en la caracterización del control óptimo como solución de una ecuación en derivadas parciales.

Nota 3.1. La ecuación (8) para la variable adjunta fue obtenida por primera vez por Bismut (1973) y más tarde por Elliot (1990), aunque ninguno de estos autores dan cuenta del hecho de que en dicha ecuación en derivadas parciales interviene el control óptimo, que es desconocido. En consecuencia la utilidad de tal ecuación es limitada. Sin embargo, en la situación analizada en este trabajo, existe una forma funcional precisa entre la variable adjunta y el control óptimo, como se ha puesto de manifiesto en (9), que puede ser explotada para obtener una ecuación en derivadas parciales que debe cumplir la variable adjunta, sin intervención de la forma específica del control óptimo. Hay que reseñar que en Elliot (1990) se registra una errata que hace que la ecuación que muestra este autor sea distinta de la determinada por Bismut (1973), que es (10).

Una vez que hemos identificado la variable adjunta con el gradiente del funcional objetivo, la ecuación en derivadas parciales (8) puede ser expresada en forma conservativa, obteniendo

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(L + \gamma f + \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma_x\Big) = 0. \tag{11}$$

Dado que esto es cierto para todo $(s,\xi(s))$, $\mathbb{P}$–c.s., (11) se satisface para (t,x). En lo anterior se ha utilizado el hecho de que $H_u = 0$.
En términos de $\Gamma(t,x,\phi)$, este sistema se expresa

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x,\phi(t,x)) + \frac{\partial}{\partial x}\bigg(\mathcal{H}(t,x,\phi(t,x)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\big(t,x,\phi(t,x)\big)\bigg) = 0, \tag{12}$$

donde $\mathcal{H}(t,x,u) = H(t,x,u,\Gamma(t,x,u))$. Llevando a efecto la derivación total se obtiene una ecuación en derivadas parciales de orden dos, expresado en esta forma conservativa, que debe satisfacer el control óptimo siempre que sea suficientemente regular.

El principio del máximo estocástico proporciona también una condición final para la ecuación en derivadas parciales (12) en el instante T. Ésta se obtiene a partir de (4) y (6) evaluados en $t = T$ y está implícitamente dada por la ecuación

$$L_u(T,x,\phi(T,x)) + S_x(T,x) f_u(T,x,\phi(T,x)) = 0. \tag{13}$$

Supondremos que es posible obtener $\phi(T,x) \doteqdot \varphi(x)$ para una función φ suficientemente regular.

Resumimos todo lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Si se verifican* H0–H2 *y* $\phi \in \mathcal{U}$ *es un control de Markov óptimo interior tal que* $f_u(t,x,\phi) \neq 0$ *para todo* t,x, *entonces* ϕ *satisface* (12) *y la condición final* (13).

4 Condiciones suficientes de optimalidad

El objetivo en esta sección es mostrar que una solución de clase $\mathcal{C}^{1,2}$ de (12)–(13) que maximiza el Hamiltoniano para todo (t,x), es una solución del problema de control estocástico. Este resultado es, por tanto, similar al Teorema de Verificación de Fleming y Rishel (1975). El interés al desarrollar condiciones suficientes de optimalidad independientes radica en que la diferente estructura de la ecuación semilineal puede permitir en ciertos modelos un análisis alternativo al usual.

Para enunciar el resultado que establece condiciones suficientes basado en la ecuación cuasilineal, probamos previamente el resultado siguiente, que establece que la variable adjunta es igual al gradiente respecto a x de la función valor óptimo. Recordamos que Γ denota $-L_u/f_u$, igualdad obtenida del principio del máximo estocástico, y que $\gamma(t,x) = \Gamma(t,x,\widehat{\phi}(t,x))$, donde $\widehat{\phi}$ es una solución suficientemente regular de la ecuación semilineal. Además, $q(s;t,x)$, $t \leq s \leq T$, es el proceso asociado a la variable adjunta p en el problema de control con condición inicial (t,x).

Consideramos las siguientes hipótesis:

S0. Las funciones L, f y σ son de clase $\mathcal{C}^1$ respecto a t y de clase $\mathcal{C}^2$ con respecto a x.

S1. La integral estocástica

$$\int_t^T (\gamma\sigma_y + q)\,\xi_x, dw(s)$$

es una martingala para $\mathcal{F}_t$. Equivalentemente,

$$E\left\{\int_t^T (\gamma\sigma_y + q)^2\,\xi_x^2\,ds\right\} < \infty,$$

o bien

$$\int_t^T E\left(\frac{\partial}{\partial x}(\gamma\sigma)(s,\xi(s))\right)^2 ds = \int_t^T E\left((\gamma\sigma)_y(s,\xi(s))\,\xi_x(s)\right)^2 ds < \infty.$$

Proposición 4.1. *Supongamos se verifican* S0 *y* S1 *y que $\widehat{\phi}$ es una solución admisible, de clase $\mathcal{C}^{1,2}$ de* (12)–(13)*, tal que $f_u(t,x,\widehat{\phi}) \neq 0$. Entonces se verifica:*

$$J_x(t,x;\widehat{\phi}) = \Gamma(t,x,\widehat{\phi}(t,x)) = p(t), \quad c.t.\ t \in [0,T],$$

$$J_{xx}(t,x;\widehat{\phi})\sigma(t,x) = q(t;t,x) = q(t), \quad c.t.\ t \in [0,T].$$

Demostración: Mediante ξ_x denotamos la derivada parcial de ξ con respecto a x, dada la condición inicial (t,x). El proceso ξ_x verifica la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} d\xi_x &= f_y\xi_x\,ds + \sigma_y\xi_x dw \qquad (14)\\ \xi_x(t) &= 1, \end{aligned}$$

véase Gihman y Skorohod (1979). El producto $\xi_x p$ verifica la siguiente ecuación diferencial estocástica, ver Arnold (1974), p. 92,

$$d(\xi_x p) = pd\xi_x + \xi_x dp + \sigma_y\xi_x q\,ds. \qquad (15)$$

Ahora un cálculo sencillo utilizando (3), (8), (14) y (15) muestra

$$d(\xi_x p) = -L_y\xi_x\,ds + (\sigma_y p + q)\xi_x\,dw.$$

Por la hipótesis S1, la integral estocástica $\int_t^T(\sigma_y p + q)\xi_x\,dw$ es una martingala, es decir, $E\int_t^T(\sigma_y p + q)\xi_x\,dw = 0$. Así, podemos usar la fórmula de Dynkin tomando esperanzas en la igualdad anterior, obteniendo

$$E(\xi_x(T)p(T)) = E(\xi_x(t)p(t)) - E\left\{\int_t^T L_y\big(s,\xi(s),\widehat{\phi}(s,\xi(s))\big)\xi_x(s)\,ds\right\}. \qquad (16)$$

Evidentemente, $E(\xi_x(t)p(t)) = p(t)$. Por otra parte, $\widehat{\phi}$ verifica la condición final (13), por lo que se satisface

$$E(\xi_x(T)p(T)) = E\left(S_y(T,\xi(T))\xi_x(T)\right).$$

El siguiente paso es intercambiar el orden de integración y derivación y también el operador esperanza en (16) para obtener

$$\begin{aligned} \Gamma(t,x,\widehat{\phi}(t,x)) &= \Gamma(t,\xi(t),\widehat{\phi}(t,\xi(t)))\\ &= p(t)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}E\left\{\int_t^T L\big(s,\xi(s),\widehat{\phi}(s,\xi(s))\big)\,ds + S(T,\xi(T))\right\} = J_x(t,x;\widehat{\phi}). \end{aligned}$$

Finalmente, observemos que $J_{xx}(t,x;\widehat{\phi})\sigma(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\Gamma(t,x,\widehat{\phi}(t,x))\sigma(t,x) = q(t)$. □

Nota 4.1. En el teorema anterior hemos probado que dada una condición inicial (t,x), se verifican las identidades

$$J_x(t,x;\widehat{\phi}(t,x)) = p(t;t,x) = p(t)$$

y, como consecuencia,

$$J_{xx}(t,x;\widehat{\phi}(t,x))\sigma(t,x) = q(t;t,x) = q(t).$$

Se puede demostrar que en el instante inicial t, $p(t)$ y $q(t)$ no son aleatorios; véase Ma y Yong (1999), El Karoui *et al* (1997) o Pardoux (1998). Como estas igualdades son ciertas para toda condición inicial, también lo serán si tomamos cualquier trayectoria de la variable de estado:

$$\begin{aligned} J_x(s,\xi(s);\widehat{\phi}(s,\xi(s))) = \Gamma(s,\xi(s),\widehat{\phi}(s,\xi(s))) &= p(s), \quad \text{c.t. } s\in[t,T], \quad \mathbb{P}\text{–c.s.}, \\ J_{xx}(s,\xi(s);\widehat{\phi}(s,\xi(s)))\sigma(s,\xi(s)) &= q(s), \quad \text{c.t. } s\in[t,T], \quad \mathbb{P}\text{–c.s.} \end{aligned}$$

Nota 4.2. La Proposición 4.1 se puede extender fácilmente al caso de horizonte infinito, donde $T=\infty$. Supongamos que $\widehat{\phi}$ es solución de la ecuación (12)–(13). Entonces, tomando límite cuando T tiende a infinito en (16) tenemos que

$$p(t) = \frac{\partial}{\partial x} E\left\{\int_t^\infty L\big(s,\xi(s),\widehat{\phi}(s,\xi(s))\big)\,ds\right\} = J_x(t,x;\widehat{\phi}),$$

siempre que

$$\lim_{T\to\infty}\left\{E_x\left(\gamma(T,\xi^{\widehat{\phi}}(T))\xi_x^{\widehat{\phi}}(T)\right)\right\} = 0 \tag{17}$$

para toda condición inicial (t,x). Esta condición se puede considerar como una condición de transversalidad en el infinito.

Teorema 4.1. *Sea $\widehat{\phi}$ una solución de clase $\mathcal{C}^{1,2}$ de* (12)–(13) *admisible verificando* S0–S1*, tal que $f_u(t,x,\widehat{\phi})\neq 0$. Supongamos también que*

$$H(t,x,\widehat{\phi},\Gamma(t,x,\widehat{\phi})) \geq H(t,x,u,\Gamma(t,x,\widehat{\phi})) \tag{18}$$

para todo (t,x), y para cualquier control de Markov u admisible. Entonces $\widehat{\phi}$ es óptimo para el problema de control (1)–(2).

Demostración. Sea u cualquier control de Markov admisible y ξ^u el proceso asociado con condición inicial (t,x). Omitiremos la dependencia de ξ^u de la condición inicial para facilitar la exposición. También denotaremos $u(s)=u(s,\xi^u(s))$. Apliquemos la regla de Itô a $J(s,\xi^u(s),u)$, $s\geq t$. Tenemos

$$dJ(s,\xi^u(s);u) = \mathcal{A}^u J(s,\xi^u(s);u)\,ds + J_x(s,\xi^u(s);u)\sigma(s,\xi^u(s))\,dw(s). \tag{19}$$

Por otro lado, podemos escribir

$$J(s,\xi^u(s);u) = E\left\{\int_s^T L(r,\xi^u(r),u(r))\,dr + S(T,\xi^u(T))|\mathcal{F}_s^t\right\}, \tag{20}$$

para todo $s\in[t,T]$, $\mathbb{P}$–c.s., donde $\{\mathcal{F}_s^t\}_{s\geq t}$ es el filtro de las σ–álgebras generadas por el movimiento Browniano en el intervalo $[t,s]$. El proceso

$$m(s) = E\left\{\int_t^T L(r,\xi^u(r),u(r))\,dr + S(T,\xi^u(T))|\mathcal{F}_s^t\right\}, \quad s\in[s,T],$$

es una $\mathcal{F}_s^t$–martingala de cuadrado integrable, así por el teorema de representación de martingalas, tenemos

$$m(s) = m(t) + \int_t^s M(r)\,dw(r),$$

con $M\in L^2_{\mathcal{F}}(t,T;\mathbb{R})$. Observemos que $m(t)=J(t,x;u)$, por tanto

$$m(s) = J(t,x;u) + \int_t^s M(r)\,dw(r). \tag{21}$$

Por (20) y (21)

$$\begin{aligned} J(s,\xi^u(s);u) &= m(s) - \int_t^s L(r,\xi^u(r),u(r))\,dr \\ &= J(t,x;u) - \int_t^s L(r,\xi^u(r),u(r))\,dr + \int_t^s M(r)\,dw(r). \end{aligned}$$

Entonces se sigue

$$dJ(s,\xi^u;u) = -L(s,\xi^u(s),u(s))\,ds + M(s)\,dw(s) \tag{22}$$

y tomando $s=t$ obtenemos[2] de (19) y (22)

$$\begin{aligned} L(t,x,u(t,x)) &+ J_s(t,x;u) + J_y(t,x;u)f(t,x,u(t,x)) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)J_{yy}(t,x;u) = 0. \end{aligned}$$

Esta igualdad se verifica para todo control admisible $u\in\mathcal{U}$ y para todo $x\in\mathbb{R}$, para casi todo $t\in[0,T]$. En particular, se verifica para $\widehat{\phi}$, por esto

$$\begin{aligned} 0 &= L(t,x,\widehat{\phi}(t,x)) + J_s(t,x;\widehat{\phi}) + J_y(t,x;\widehat{\phi})f(t,x,\widehat{\phi}(t,x)) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)J_{yy}(t,x;\widehat{\phi}) \\ &\geq L(t,x,u(t,x)) + J_s(t,x;\widehat{\phi}) + J_y(t,x;\widehat{\phi})f(t,x,u(t,x)) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)J_{yy}(t,x;\widehat{\phi}), \end{aligned}$$

[2]Observemos que hasta aquí todas las igualdades se tienen $\mathbb{P}$–c.s., pero al hacer las sustitución por (t,x) serán ciertas.

para todo $x \in \mathbb{R}$, para casi todo $t \in [0,T]$. La última desigualdad se debe a que, como se ha probado en el teorema anterior, $J_y(t,x;\widehat{\phi}) = \Gamma(t,x,\widehat{\phi}(t,x))$ y teniendo en cuenta (18). Reemplazando (t,x) por $(s,\xi^u(s))$, $s \in [t,T]$, en esta desigualdad, obtenemos

$$E\left\{\int_t^T (L(s,\xi^u(s),u(s)) + \mathcal{A}^u J(s,\xi^u(s),\widehat{\phi}))\,ds\right\} \leq 0 \tag{23}$$

después de integrar entre t y T y tomar esperanzas. Dado que por las hipótesis impuestas

$$\int_t^T J_x(s,\xi^u(s);\widehat{\phi})\sigma(s,\xi^u(s))\,dw(s)$$

es una $\mathcal{F}_t$–martingala, tenemos por la fórmula de Dynkin en (22)

$$E\{S(T,\xi^u(T))\} - J(t,x;\widehat{\phi}) = E\left\{\int_t^T \mathcal{A}^u J(s,\xi^u(s),\widehat{\phi})\,ds\right\}. \tag{24}$$

Sustituyendo (24) en (23) obtenemos

$$E\left\{\int_t^T L(s,\xi^u(s),u(s))\,ds\right\} \leq J(t,x;\widehat{\phi}) - E\{S(T,\xi^u(T))\}, \tag{25}$$

es decir, $J(t,x;u) \leq J(t,x;\widehat{\phi})$. □

Nota 4.3. La primera consecuencia de este teorema es que si $\widehat{\phi}$ es una solución suave de (12), (13), verificando (18), entonces

$$V(t,x) = J(t,x;\widehat{\phi}(t,x)), \quad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}.$$

Nota 4.4. Si tenemos en cuenta el Teorema 4.1 y la Nota 4.1, hemos probado la conexión entre el Principio del Máximo Estocástico y la Programación Dinámica en el caso suave:

$$\begin{aligned} V_x(s,\xi(s)) &= p(s), \quad \forall s \in [t,T], \quad \mathbb{P}\text{–c.s.},\\ V_{xx}(s,\xi(s))\sigma(s,\xi(s)) &= q(s), \quad \forall s \in [t,T], \quad \mathbb{P}\text{–c.s.} \end{aligned}$$

Por otro lado, si aplicamos la regla de Itô a $V(s,\xi(s))$ y tenemos en cuenta (22), notamos que la función valor óptimo verifica

$$V(s,\xi(s)) = V(t,x) - \int_t^s L(r,\xi(r),u(r))dr + \int_t^s V_x(r,\xi(r))\sigma(r,\xi(r))dw(r).$$

Véase Zhou (1990) o Yong y Zhou (1999).

Nota 4.5. La condición (18) se da automáticamente cuando $\widehat{\phi}$ es interior al conjunto de controles y el hamiltoniano es cóncavo con respecto a u para cada t, x ya que, entonces, como

$$H_u(t, x, \widehat{\phi}, \Gamma(t, x, \widehat{\phi})) = 0$$

se satisface trivialmente, $\widehat{\phi}$ es un punto crítico de la función cóncava $u \mapsto H(\cdot, \cdot, u, \cdot)$, por lo que $\widehat{\phi}$ es máximo global de H.

Nota 4.6. En el caso de horizonte infinito, $T = \infty$, a las hipótesis del Teorema 4.1 debe añadirse dos supuestos sobre el comportamiento a largo plazo de $J(t, x; \widehat{\phi})$ para asegurar la optimalidad de $\widehat{\phi}$. Una es la presentada en la Nota 4.2, la cual asegura la identidad entre p y $(\partial/\partial x)J(t, x; \widehat{\phi})$. La otra se obtiene al sustituir $S(T, \xi^u(T))$ por $J(T, \xi^u(T); \widehat{\phi})$ en (25), dado que en el problema de horizonte infinito no existe función residual. Tomando el límite cuando T tiende a infinito, si se verifican las condiciones:

$$\limsup_{T\to\infty} J(T, \xi^u(T); \widehat{\phi}) = \limsup_{T\to\infty} V(T, \xi^u(T)) \geq 0,$$

y

$$\lim_{T\to\infty} E\left\{\int_t^T L(s, \xi^u(s), u(s))\, ds\right\} = E\left\{\int_t^\infty L(s, \xi^u(s), u(s))\, ds\right\},$$

para todo control admisible u, entonces se deduce que $J(t, x; u) \leq J(t, x; \widehat{\phi})$.

Nota 4.7. La condición (17) se puede escribir como una derivada total así:

$$\lim_{T\to\infty} \left\{E_x V_x(T, \xi^{\widehat{\phi}}(T))\right\} = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial x} \lim_{T\to\infty} E_x V(T, \xi^{\widehat{\phi}}(T)) = 0,$$

intercambiando los signos de derivación y límite. En principio, esta condición no es equivalente a la del Teorema de Verificación en horizonte infinito de Fleming y Soner (1993), pág. 146, ecuación 9.6, que es

$$\liminf_{T\to\infty} E\left\{V(T, \xi^{\widehat{\phi}}(T))\right\} \leq 0,$$

cualquiera que sea el dato inicial (t, x).

Nota 4.8. Un concepto muy habitual en modelos económicos y que admite diferentes interpretaciones, es el factor de descuento o tanto de preferencia. En este caso el pago integral es

$$E\left\{\int_t^T e^{-\rho(s-t)} L(s, y(s), u(s))\, ds + e^{-\rho(T-t)} S(T, y(T))\right\},$$

donde ρ es una constante no negativa. La idea subyacente en la presencia del factor $e^{-\rho(s-t)}$, cuando el tanto de preferencia ρ es estrictamente positivo, es que el agente

maximizador actualiza la utilidad instantánea obtenida en el tiempo s al tiempo t mediante el factor de actualización exponencial. De esta forma, la utilidad obtenida se valora más cuando su obtención esté más próxima al instante inicial.
En este caso la ecuación (12) adopta la forma:

$$-\rho\Gamma + \frac{\partial}{\partial t}\Gamma + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{H} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\right) = 0,$$

con[3] $\Gamma = -L_u/f_u$, donde se ha eliminado la dependencia respecto a las variables independientes (t, x), con las condiciones finales

$$\Gamma\left(T, x, \phi\left(T, x\right)\right) = S(T, x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

si $T < \infty$.

Nota 4.9. En el problema de horizonte infinito con descuento y autónomo, el funcional objetivo se expresa:

$$J(t, x; u) = E\left\{\int_t^\infty e^{-\rho(s-t)}L(\xi(s), u(s))\, ds\right\}.$$

Las funciones L, f y σ no dependen del tiempo, es decir,

$$L(t, x, u) \equiv L(x, u), \quad f(t, x, u) = f(x, u), \quad \sigma(t, x) \equiv \sigma(x)$$

y ρ es una constante positiva. Dado que el problema de control es autónomo, es usual obtener el control óptimo en la clase de controles de Markov estacionarios, es decir, independientes de la variable temporal. En esta situación es inmediato que la función valor óptimo es también independiente de la variable temporal, es decir, $V(t, x) \equiv V(x)$.
Con controles de Markov estacionarios el sistema cuasilineal (12) se simplifica y aparece en la forma:

$$-\rho\Gamma + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{H} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right) = 0. \tag{26}$$

La condición de transversalidad de la Nota 4.2 es:

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\rho(T-t)}E_x\left(\left(-L_u/f_u\right)\left(\xi^{\widehat{\phi}}(T), \widehat{\phi}(\xi^{\widehat{\phi}}(T))\right)\xi_x^{\widehat{\phi}}(T)\right) = 0. \tag{27}$$

Nota 4.10. En el caso determinista, esto es, cuando $\sigma = 0$, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (12) es de primer orden. El sistema fue obtenido en Bourdache–Siguerdidjane y Fliess (1987) por métodos geométricos y el principio del

[3]Notemos que dada una condición inicial (t, x) y dado $s \in [t, T]$, la función adjunta verifica: $\gamma(s, \xi(s)) = \Gamma(s, \xi(s), u(s)) = e^{-\rho(s-t)}(-L_u/f_u)(s, \xi(s), u(s))$. Por tanto $\gamma(t, x) = \Gamma(t, x, \phi(t, x)) = -(L_u/f_u)(t, x, \phi(t, x))$.

máximo de Pontryagin. Por supuesto, los resultados siguen siendo válidos para soluciones $\mathcal{C}^1$. Observemos que la condición (18) no cambia debido a la independencia del término de difusión respecto a las variables de control. En Rincón–Zapatero *et al* (1998, 2000) se proporciona una extensión a juegos diferenciales.
En el caso determinista de horizonte infinito no es necesario, por supuesto, comprobar la condición S1, tan sólo basta demostrar la de transversalidad en infinito.

Nota 4.11. Cuando el problema (1)–(2) es de minimización, todos los resultados son válidos cambiando el sentido de la desigualdad (18) y el hamiltoniano debe ser convexo en la Nota 4.5.

5 Caso homogéneo

Un problema interesante desde el punto de vista económico aparece cuando las funciones L, S del problema (1)–(2) son homogéneas del mismo grado, respecto de las variables de estado y de control. A continuación hallamos el control óptimo de forma explícita en los casos horizonte finito y horizonte infinito. Por comodidad notacional hemos preferido tratar antes el segundo caso, resultando inmediato el primero a partir de ése.

5.1 Horizonte infinito

Lema 5.1. *Supongamos que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado δ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado 1. Definimos la función $\overline{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ así: $\overline{g}(x) = g(x, \phi(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se tiene que $\overline{g}$ es homogénea de grado δ y $\overline{g}'(x) = \delta \frac{\overline{g}(x)}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Por homogenidad de las funciones ϕ y g, es inmediato que para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\overline{g}(tx) = g(tx, \phi(tx)) = g(tx, t\phi(x)) = t^\delta \overline{g}(x).$$

Por tanto, $\overline{g}$ es homogénea de grado δ. La demostración concluye aplicando el teorema de Euler para funciones homogéneas. □

Proposición 5.1. *En las condiciones del Teorema 4.1, si el problema es autónomo*

$$L(s,x,u) = e^{-\rho(s-t)} L(x,u), \quad \rho > 0, \quad f(s,x,u) = f(x,u), \quad \sigma(s,x) = \sigma(x),$$

con L homogénea de grado δ y f, σ homogéneas de grado 1, entonces el control $\widehat{\phi}$ definido por $\widehat{\phi}(x) = \lambda x$, con λ una solución de la ecuación

$$-\rho\Gamma(1,\lambda) + \delta\left(L(1,\lambda) + f(1,\lambda)\Gamma(1,\lambda) + \frac{1}{2}\sigma^2(1,\lambda)(\delta-1)\Gamma(1,\lambda)\right) = 0 \qquad (28)$$

que verifica la condición

$$\frac{L(1,\lambda)}{\Gamma(1,\lambda)} > \frac{1}{2}\delta\sigma^2(1), \qquad (29)$$

es un control óptimo del problema de control (1)–(2).

Demostración. Un control óptimo está caracterizado por ser solución de la EDP (26)

$$-\rho\Gamma(x,\phi(x))+\partial_x\left(L(x,\phi(x))+f(x,\phi(x))\Gamma(x,\phi(x))+\frac{1}{2}\sigma^2\partial_x\left(\Gamma(x,\phi(x))\right)\right)=0,$$

si se cumplen la condición S1 y la condición de transversalidad (27). Si redefinimos como en el enunciado del Lema 5.1 las funciones, entonces esta ecuación es

$$-\rho\overline{\Gamma}(x)+\overline{\mathcal{H}^{\mathrm{est}}}'(x)=0,\quad \text{con}\quad \overline{\mathcal{H}^{\mathrm{est}}}=\overline{\mathcal{H}}+\frac{1}{2}\overline{\sigma}^2\,\overline{\Gamma}'=\overline{L}+\overline{f}\,\overline{\Gamma}+\frac{1}{2}\overline{\sigma}^2\,\overline{\Gamma}'.$$

Es inmediato que si ϕ es homogénea de grado 1, $\overline{\mathcal{H}^{\mathrm{est}}}$ es homogénea de grado δ y la ecuación anterior es, por el lema,

$$-\rho\overline{\Gamma}(x)+\delta\frac{\overline{\mathcal{H}^{\mathrm{est}}}(x)}{x}=0.$$

Ensayamos $\phi(x)=\lambda x$, homogénea de grado 1, y la homogeneidad nos lleva a que $\overline{g}(x)=g(1,\lambda)x^r$ para $g=L,\ f,\ \sigma,\ \Gamma$ con $r=\delta,\ 1,\ 1,\ \delta-1$, respectivamente. Usando que Γ es homogénea de grado $\delta-1$ tenemos, por el Lema 5.1, $\overline{\Gamma}'(x)=(\delta-1)\frac{\overline{\Gamma}(x)}{x}$, y sustituyendo en la EDP anterior se obtiene que λ está dado por (28).
Por otra parte, la ecuación de estado es de la forma

$$d\xi(s)=f(1,\lambda)\xi(s)ds+\sigma(1,\lambda)\xi(s)dw(s),\quad \xi(t)=x,$$

porque f, σ son homogéneas de grado 1. En consecuencia, ξ_x verifica

$$d\xi_x(s)=f(1,\lambda)\xi_x(s)ds+\sigma(1,\lambda)\xi_x(s)dw(s),\quad \xi_x(t)=1$$

y por la fórmula de Itô se tiene

$$\begin{aligned} d(\xi^{\delta-1}\xi_x)(s) &= \delta\left(f(1,\lambda)+\frac{1}{2}(\delta-1)\sigma^2(1,\lambda)\right)(\xi^{\delta-1}\xi_x)(s)ds \\ &+ \delta\sigma(1,\lambda)(\xi^{\delta-1}\xi_x)(s)dw(s), \\ (\xi^{\delta-1}\xi_x)(t) &= x^{\delta-1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Así, por (28),

$$\begin{aligned} E_x\left(\Gamma\left(\xi(T),\phi(\xi(T))\right)\xi_x(T)\right) &= \Gamma(1,\lambda)E_x\left(\left(\xi^{\delta-1}\xi_x\right)(T)\right) \\ &= \Gamma(1,\lambda)\exp\left\{\delta\left(f(1,\lambda)+\frac{1}{2}(\delta-1)\sigma^2(1,\lambda)\right)(T-t)\right\} \\ &= \Gamma(1,\lambda)\exp\left\{\left(\rho-\delta\frac{L(1,\lambda)}{\Gamma(1,\lambda)}\right)(T-t)\right\} \end{aligned}$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{T\to\infty}e^{-\rho(T-t)}E_x\left(\Gamma\left(\xi(T),\phi(\xi(T))\right)\xi_x(T)\right)=\Gamma(1,\lambda)\lim_{t\to\infty}e^{-\delta\frac{L(1,\lambda)}{\Gamma(1,\lambda)}(T-t)}=0$$

se verifica por (29).
Para probar la condición S1 observemos

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma\Gamma) = \delta\sigma(1)\Gamma(1,\lambda)\xi^{\delta-1}\xi_x.$$

Así, el integrando que aparece en S1 es la esperanza del cuadrado de este proceso. Ésta, que se calcula usando la fórmula de Itô con (30), es:

$$\begin{aligned}
&\delta^2\sigma^2(1)\Gamma^2(1,\lambda)E_x\left(\xi^{\delta-1}\xi_x\right)^2(s)\\
&\quad = \delta^2\sigma^2(1)\Gamma^2(1,\lambda)\exp\left\{-2\delta\left(\frac{L(1,\lambda)}{\Gamma(1,\lambda)} - \frac{1}{2}\delta\sigma^2(1)\right)(s-t)\right\},
\end{aligned}$$

por (28). Se verifica S1 si y sólo si el exponente es negativo, es decir, por (29). Nótese que en este caso la condición S1 es más fuerte que la de transversalidad.
Esto concluye la prueba. □

5.2 Horizonte finito

Cuando el horizonte es acotado, bajo las hipótesis de homogeneidad de las funciones que intervienen en el problema de control, respecto de las variables de estado y de control (y no del tiempo), obtenemos el resultado análogo al anterior, que se prueba sin dificultad.

Proposición 5.2. *En las condiciones del Teorema* 4.1*, si L, S son homogéneas de grado δ y f, σ son homogéneas de grado 1, respecto de (x,u), entonces es óptimo del problema* (1)–(2) *el control ϕ definido por $\phi(t,x) = \lambda(t)x$, con λ una solución de la ecuación diferencial de primer orden*[4]

$$\begin{aligned}
\Gamma_t + \Gamma_u\dot{\lambda}(t) + \delta\Big(L + f\Gamma + \frac{1}{2}\sigma^2(\delta-1)\Gamma\Big) &= 0,\\
\widetilde{u}(T,1,S_x(T,1)) &= \lambda(T).
\end{aligned}$$

5.3 Aplicación a un modelo de gestión de un recurso natural no renovable

En este apartado planteamos un problema de optimización de la tasa de extracción de un recurso natural no renovable. Se pueden consultar a este respecto las monografías Clark (1990), Sethi y Thompson (2000), cap. 10, y las referencias que éstas contienen.
En el modelo que mostramos sólo se considera como acción posible el esfuerzo de extracción y el recurso se consume proporcionando una utilidad instantánea. Consideramos entonces el problema de maximizar una utilidad esperada de la tasa de

[4]Todas las funciones están evaluadas en $(t,1,\lambda(t))$, salvo σ que lo está en $(t,1)$.

extracción $c(s)$ en un horizonte temporal no acotado con tanto de descuento $\rho > 0$,

$$\max_c E_x \left(\int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} U(c(s)) ds \right),$$

sujeto a la evolución del stock de recurso X :

$$dX(s) = -c(s)ds + \sigma X(s)dw(s), \quad X(t) = x.$$

Suponemos que la función de utilidad $U(c)$ es cóncava respecto a c y homogénea de grado δ. Es inmediato ver que el hamiltoniano, $H(t, x, c, p) = U(c) - cp$, es cóncavo de c.

Siguiendo la Proposición 5.1, es óptima una tasa de extracción función lineal homogénea del recurso, $c(x) = \lambda x$, con λ verificando la ecuación (28), es decir,

$$\lambda = \frac{\rho}{1-\delta} + \frac{1}{2}\sigma^2\delta.$$

Esto está justificado dado que $\lambda > 0$ implica la condición (29).

Nota 5.1. Se puede plantear el problema en horizonte finito, utilizando la misma técnica. En este caso, λ es una función determinada por una ecuación diferencial de orden uno con condición final en T.

6 Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto un nuevo enfoque para el estudio de ciertos problemas de control óptimo estocástico bastante generales, en los que el término de difusión no se ve afectado por las variables de control. Muchos modelos económicos interesantes como el de gestión de recursos renovables o no renovables están englobados en este tipo. Obtenemos una nueva ecuación en derivadas parciales de segundo orden que caracteriza al control óptimo en lugar de a la función valor, como sucede en la ecuación de HJB. Su diferente estructura, en especial su forma conservativa, hace posible su empleo alternativo a la ecuación de HJB. Lo que hemos desarrollado en el trabajo es sólo una pequeña muestra de las posibilidades del estudio de esta ecuación. La simplicidad de la ecuación obtenida, frente a la ecuación de HJB nos hace creer que proporcionará nuevos resultados a estos problemas.

Referencias

Arnold, L. (1974). Stochastic Differential Equations. Theory and applications. John Wiley & Sons, New York.

Bellman, R. (1957). Dynamic Programming. Princeton Univ. Press, New Jersey.

Bismut, J.M. (1973): Conjugate convex functions in optimal stochastic control, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 44, 484-404.
Borkar, V.S. (1989): Optimal Control of Diffusion Processes, *Pitman Research Notes in Mathematics*, 203. Longman Scientific & Technical, Harlow, UK.
Bourdache-Siguerdidjane, H. y M. Fliess (1987): Optimal feedback control of non-linear systems. *Automatica* 23, 365–372.
Clark, C.W. (1990). Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources. Wiley, New York.
El Karoui, N., Peng, S. y Quenez, M.C. (1997): Backward stochastic differential equations in finance, *Mathematical Finance* 7, 1, 1–71.
Elliot, R.J. (1990): The optimal control of diffusions, *Applied Mathematics and Optimization*, 22, 229-240.
Fleming, W.H. y R.W. Rishel (1975). Deterministic and Stochastic Optimal Control. Springer-Verlag, New York.
Fleming W.H. y H.M. Soner (1993). Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Springer-Verlag, New York.
Gihman, I.I. y Skorohod, A.V. (1979). Controlled Stochastic Processes. Springer–Verlag.
Haussman, U.G. (1986). A Stochastic Maximum Principle for Optimal Control of Diffusions, *Pitman Research Notes in Mathematics* 151. Longman, Harlow.
Karatzas, I. y Shreve, S.E. (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer–Verlag, New York.
Ma, J. y Yong, J. (1999). Forward-Backward Stochastic Differential Equations and Their Applications. *Lecture Notes in Mathematics* 1702. Springer–Verlag, Berlin.
Pardoux, E. (1998): Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order, en *Stochastic Analysis and Related Topics VI: The Geilo Workshop, 1996*, 79–127. Decreusefond, L., Gjerde, J., Oksendal, B., Üstünel, A.S., eds. Birkhäuser, Boston.
Peng, S.G. (1990): A general stochastic maximum principle for optimal control problems, *SIAM Journal of Control and Optimization* 28, 4, 966–979.
Rincón-Zapatero, J.P., Martínez, J. y G. Martín-Herrán (1998): New method to characterize subgame perfect Nash equilibria in differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications* 96, 2, 377–395.
Rincón-Zapatero, J. P., Martín-Herrán, G. y Martínez, J. (2000): Identification of efficient subgame-perfect Nash equilibria in class of differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications* 104, 1, 235–242.
Sethi, S.P. y Thompson, G.L. (2000). Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics. Kluwer Academic Publishers, Boston.
Yong, J. y Zhou, X.Y. (1999). Stochastic Controls. Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer–Verlag, New York.
Zhou, X.Y. (1990): The connection between the maximum principle and dynamic programming in stochastic control, *Stochastics and Stochastics Reports* 31, 1–13.